

NICHTLINEARE WELLEN UND RÄUMLICHE DYNAMIK

Beim *Wasserwellenproblem* handelt es sich um die dreidimensionale wirbelfreie Strömung einer perfekten Flüssigkeit, die nach unten durch eine impermeable waagerechte Ebene $\{y = 0\}$ und nach oben durch eine freie Oberfläche $\{y = h + \eta(x, z, t)\}$ beschränkt ist, wobei die Bewegung der freien Oberfläche durch Schwerkraft und Oberflächenspannung bestimmt wird. Dieses außergewöhnliche Problem, das Euler (Abbildung 1) als erster mit einem skalaren Potential ϕ formulierte, ist mittlerweile zum Paradigma für die meisten modernen Methoden in der nichtlinearen Funktionalanalyse geworden. Im Laufe der Jahre hat das Problem an verschiedenste mathematische Untersuchungsstrategien appelliert: iterative Methoden, Bifurkationstheorie, Methoden aus der Funktionentheorie, Methoden für partielle Differentialgleichungen, Variationsrechnung, Theorie positiver Operatoren, symplektische Geometrie, Abbildungsgrad, KAM-Theorie, . . . In diesem Aufsatz möchte ich die Rolle des Wasserwellenproblems als Paradigma in der Theorie der Hamiltonschen Systeme und konservativer Musterbildung verdeutlichen.

$$\begin{array}{ll}
 \phi_{zz} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0, & 0 < y < h + \eta, \\
 \phi_y = 0, & y = 0, \\
 \phi_y = \eta_t + \eta_x \phi_x + \eta_z \phi_z, & y = h + \eta, \\
 \phi_t = -\frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) - g\eta & \\
 + \sigma \left[\frac{\eta_x}{\sqrt{1 + \eta_x^2 + \eta_z^2}} \right]_x + \sigma \left[\frac{\eta_z}{\sqrt{1 + \eta_x^2 + \eta_z^2}} \right]_z, & y = h + \eta
 \end{array}$$



Abbildung 1: Euler (1707–1783), der als erster das Wasserwellenproblem (links) formulierte

Permanente Wellen sind Lösungen des Wasserwellenproblems, die in einem mitbewegten Koordinatensystem stationär sind, es gilt also $\eta(x, z, t) = \eta(\xi, z)$ mit $\xi = x - ct$. Das entstehende zeitunabhängige Problem lässt sich durch die *räumliche Dynamik* untersuchen, eine Methode, die von K. Kirchgässner als Herangehensweise für Wasserwellen eingeführt wurde und mittlerweile Anwendungen in einem breiten Spektrum anderer Probleme gefunden hat (Reaktions-Diffusionsgleichungen, spirale Wellen, mathematische Biologie, . . .). Hauptidee ist, ein stationäres Problem als Evolutionsgleichung zu formulieren, in der eine unbeschränkte *räumliche* Richtung die Rolle der Zeitvariablen spielt. Im permanenten Wasserwellenproblem kann jede waagerechte räumliche Richtung $X = \sin \theta_2 \xi - \cos \theta_2 z$ als Zeitvariable genommen werden, wobei die Gleichungen sich als Evolutionsgleichung

$$u_X = Lu + Nu, \quad u \in \mathcal{X} \quad (1)$$

formulieren lassen; der unendlichdimensionale Phasenraum \mathcal{X} enthält Funktionen, die beispielsweise $2\pi/\nu$ -periodisch in einer zweiten, anderen räumlichen Richtung $Z = \sin \theta_1 \xi - \cos \theta_1 z$ sind. Die Evolutionsgleichung (1) wird gefunden, indem eine Legendre-Transformation ausgehend von dem klassischen Variationsprinzip

$$\begin{aligned}
 \delta \int_0^{2\pi} \int_0^{h+\eta} & \left\{ \int_0^{h+\eta} \left(-\sin \theta_2 \phi_X - \nu \sin \theta_1 \phi_Z + \frac{1}{2} (\phi_X^2 + \phi_Y^2 + \nu^2 \phi_Z^2 + 2\nu \cos(\theta_1 - \theta_2) \phi_X \phi_Z) \right) dy \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} g\eta^2 + \sigma \left(\sqrt{1 + \eta_X^2 + \nu^2 \eta_Z^2 + 2\nu \cos(\theta_1 - \theta_2) \eta_X \eta_Z} - 1 \right) \right\} dZ dX = 0,
 \end{aligned}$$

für die gewünschten Wellenbewegungen durchgeführt wird. In vielen Fällen lässt sich Gleichung (1) durch eine Theorie invarianter Mannigfaltigkeiten von A. Mielke behandeln, die ebenfalls als Herangehensweise für Wasserwellen entwickelt wurde aber mittlerweile Anwendungen auf ein breites Spektrum von Problemen (Elastizität, Festkörpermechanik, . . .) gefunden hat. Diese Theorie zeigt, dass alle kleinen, beschränkten Lösungen zu (1) auf einer endlichdimensionalen Mannigfaltigkeit liegen; das Wasserwellenproblem wird somit auf ein lokal äquivalentes endlichdimensionales Hamiltonsches System reduziert, dessen Dimension und Eigenschaften von den physikalischen Parametern (Schwerkraft g , Oberflächenspannung σ , Wellengeschwindigkeit c , Wassertiefe h) abhängen.

Zweidimensionale, d. h. z -unabhängige permanente Wellen sind natürliche Kandidaten für eine Anwendung der räumlichen Dynamik mit $X = \xi$. B. Buffoni, M. D. Groves & J. F. Toland zeigten, dass die invariante Mannigfaltigkeit in einem gewissen Parameterregime vierdimensional ist und durch die Hamiltonsche Gleichung

$$u'''' + Pu'' + u - u^2 = 0, \quad P \in (-2, -2 + \epsilon)$$

bestimmt wird. Erstaunlicherweise taucht diese Gleichung in vielen, anscheinend nicht verwandten Problemen in den Naturwissenschaften auf (z. B. in der nichtlinearen Elastizität, in der nichtlinearen Optik und nun in nichtlinearen Wasserwellenproblemen). Eine seiner höchstinteressanten Eigenschaften ist sein *chaotisches Verhalten*: Seine Lösungsmenge enthält ein Smalesches Hufeisen. Infolgedessen besitzt sie unendlich viele *homokline Lösungen*, d. h. Lösungen, die gegen Null konvergieren, wenn die Zeitvariable gegen unendlich konvergiert. Die entsprechenden Lösungen des Wasserwellenproblems heißen *solitäre Wellen* und konvergieren gegen den Ruhezustand des Wassers für $\xi \rightarrow \pm\infty$. Dieses Ergebnis zeigt, dass es unendlich viele solcher Lösungen gibt; sie sind Senkungswellen mit 2, 3, 4, ... großen Senkungen und jeweils 2, 3, ... dazwischenliegenden kleinen Schwingungen, die exponentiell und oszillatorisch abklingen. Zwei Wellen aus dieser Familie sind in Abbildung 2 skizziert.

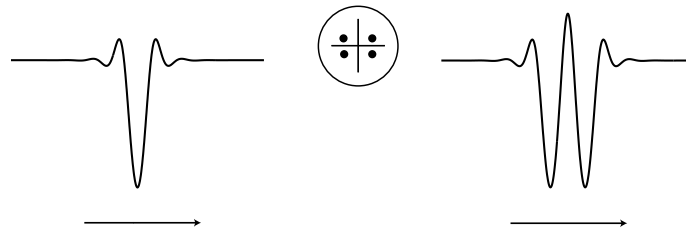


Abbildung 2: Zwei der von B. Buffoni, M. D. Groves & J. F. Toland gefundenen solitäre Wellen, die auf einer vierdimensionalen invarianten Mannigfaltigkeit mit der gezeigten Eigenwertstruktur liegen.

Die Untersuchung zweidimensionaler solitärer Wellen wurde von G. Iooss & K. Kirchgässner und B. Buffoni & M. D. Groves fortgesetzt, die Parameterwerte entdeckten, bei denen eine *Hamiltonsche Hopf-Bifurkation* auf einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit stattfindet (beim Variieren eines Parameters werden zwei nichthalbeinfache imaginäre Eigenwerte komplex). Hamiltonsche Hopf-Bifurkationen sind Himmelsmechanikern bekannt, wo sie im eingeschränkten drei-Körper-Problem für die ebene Bewegung eines leichten Himmelskörpers um den Schwerpunkt zweier schwerer Himmelskörper auftauchen; die Hamiltonsche Hopf-Bifurkation entsteht bei einem gewissen Massenverhältnis der zwei schweren Körpern (dem Routhschen Massenverhältnis). Iooss & Kirchgässner benutzten die Birkhoffsche Normalform und zeigten, dass Hamiltonsche Hopf-Bifurkationen homokline Lösungen erzeugen, die die Form eines durch eine exponentiell abklingende umhüllende Funktion modulierte periodischen Wellenzuges annehmen (Abbildung 3). Buffoni & Groves zeigten, dass sogar unendlich viele solcher Lösungen existieren, die mehrfachen Kopien der Iooss-Kirchgässner-Lösungen ähneln. Ihr Beweis basiert auf modernen Methoden aus der Variationstheorie (Bergpfad-Argumenten und dem Prinzip konzentrierter Kompaktheit) zusammen mit dem Abbildungsgrad. Diese Ergebnisse sind nicht auf das Wasserwellenproblem beschränkt, sie liefern dramatische neue Lösungen des drei-Körper-Problems und Hamiltonsche Hopf-Bifurkationen werden in immer mehr Situationen entdeckt (in Taylor-Couette-Strömungen, in der nichtlinearen Elastizität, ...).

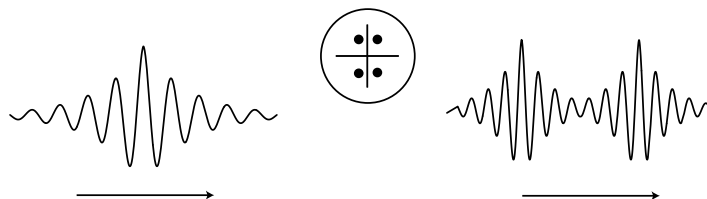


Abbildung 3: Zwei der von B. Buffoni & M. D. Groves gefundenen Multi-Puls-solitäre Wellen, die auf einer vierdimensionalen invarianten Mannigfaltigkeit mit der gezeigten Eigenwertstruktur liegen.

M. D. Groves & A. Mielke haben als erste dreidimensionale permanente Wasserwellen durch räumliche Dynamik untersucht. Sie nahmen $X = \xi$ und $Z = z$, so dass die Wellen bezüglich der Richtung quer zur Wellenbewegung periodisch sind. Insbesondere identifizierten sie einen Parameterbereich, in dem die invariante Mannigfaltigkeit sechsdimensional ist und deren Fluss durch eine Hamiltonsche Hopf-Bifurkation zusammen mit einem Paar imaginärer Eigenwerte bestimmt wird. Iooss & Kirchgässner hatten gezeigt, wie eine Hamiltonsche Hopf-Bifurkation zu homoklinen Lösungen führt, und der klassische Lyapunovscher Zentrumssatz besagt, dass ein Paar imaginärer Eigenwerte mit periodischen Wellen verbunden ist. Groves & Mielke zeigten, wie diese Ergebnisse zusammengeführt werden können, um eine *verallgemeinerte solitäre Welle* zu finden, die gegen eine periodische Welle (eigentlich eine z -unabhängige periodische Welle) für $\xi \rightarrow \pm\infty$ konvergiert; ihr Ergebnis lässt sich auf verallgemeinerte Multi-Puls-solitäre Wellen durch die Methode von B. Buffoni & M. D. Groves verallgemeinern und ist auf jedes sechsdimensionale Hamiltonsche System mit dieser Bifurkation anwendbar.

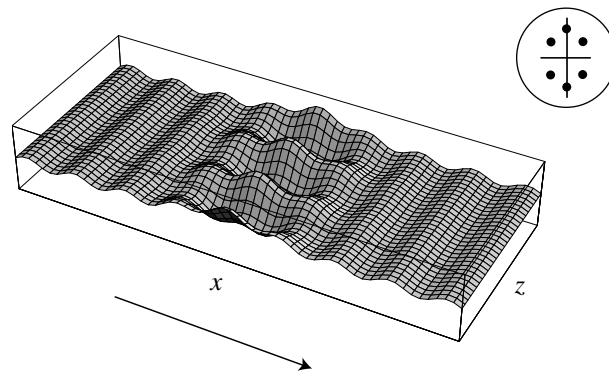


Abbildung 4: Eine von M. D. Groves & A. Mielke gefundene verallgemeinerte solitäre Welle, die auf einer sechsdimensionalen invarianten Mannigfaltigkeit mit der gezeigten Eigenwertstruktur liegt.

M. D. Groves & M. Haragus haben in letzter Zeit alle möglichen Bifurkationsszenarien für dreidimensionale permanente Wellen durch räumliche Dynamik katalogisiert. Insbesondere kompilierten sie einen Katalog dreidimensionaler Wellen, die in einer ausgesonderten waagerechten Richtung (der Zeitvariablen) das Profil einer solitären Welle oder einer verallgemeinerten solitären Welle haben; einige dieser Wellen sind etwas exotisch (Abbildung 5).

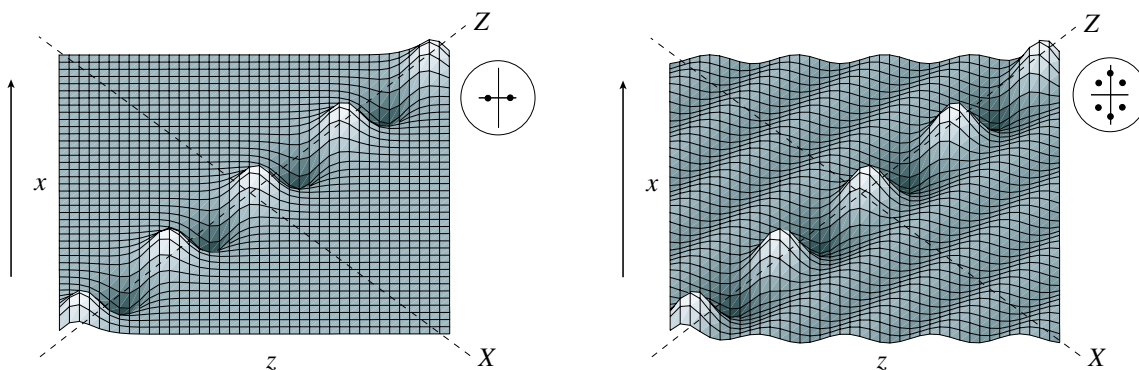


Abbildung 5: Zwei Beispiele aus dem von M. D. Groves & M. Haragus kompilierten Katalog dreidimensionaler permanenter Wellen. Die Welle auf der linken Seite hat das Profil einer solitären Welle in X , während die Welle auf der rechten Seite das Profil einer verallgemeinerten solitären Welle in X hat; beide Wellen sind periodisch in Z und bewegen sich in die x -Richtung mit konstanter Geschwindigkeit.

Groves & Haragus untersuchten auch doppelperiodische permanente Wellen durch räumliche Dynamik. Periodizität in der Z -Richtung ist in der Methode eingebaut, so dass doppelperiodische Wellen Lösungen des reduzierten Hamiltonschen Systems entsprechen, die in der Zeitvariablen X periodisch sind. Solche Lösungen können durch den klassischen Lyapunovschen Zentrumssatz gefunden werden, und abhängig von den physikalischen Parametern tauchen alle möglichen Fälle auf: nichtresonante Eigenwerte, halbeinfache Eigenwertresonanzen, nichthalbeinfache Eigenwertresonanzen und gleiche oder verschiedene Kreinsche Signaturen! Doppelperiodische Oberflächenwellen (Abbildung 6) und periodische Bewegungen von Himmelskörpern (des n -Körper-Problems aus der Himmelsmechanik) sind laut diesen Bemerkungen zwei Aspekte derselben mathematischen Theorie, nämlich der Theorie endlichdimensionaler Hamiltonscher Systeme und des Lyapunovschen Zentrumssatzes.

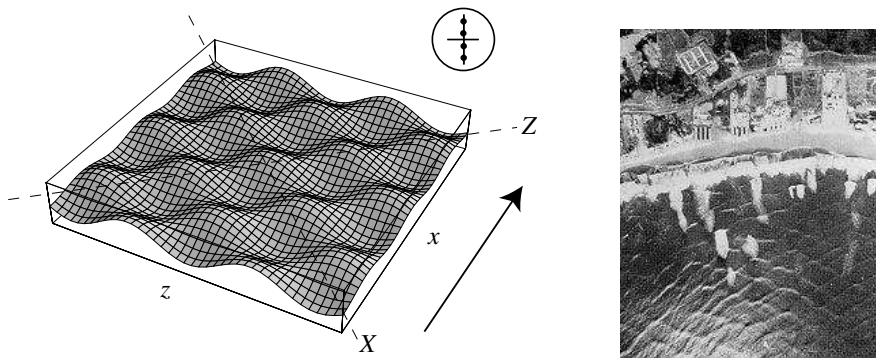


Abbildung 6: Die doppelperiodische Welle auf der linken Seite wird durch den Lyapunovschen Zentrumssatz auf einer vierdimensionalen invarianten Mannigfaltigkeit konstruiert. Sechseckige doppelperiodische Wellen werden oft in der Natur beobachtet, wie diese Luftfotographie es zeigt; sie lassen sich mathematisch durch dieses Verfahren erklären.

Ich möchte mit zwei Beispielen abschließen, in denen eine Reduktion auf eine endlichdimensionale invariante Mannigfaltigkeit zwar nicht möglich ist, aber die räumliche Dynamik trotzdem zu einem Existenzsatz für permanente Wellen führt. Beim ersten Beispiel handelt es sich um ein *dimensionsbrechendes Phänomen*, einen Begriff für das spontane Entstehen einer räumlich nichthomogenen Lösung einer partiellen Differentialgleichung aus einer Lösung, die in einer oder mehrerer räumlichen Richtungen homogen ist. Ein relevantes Beispiel wäre die solitäre Wellenlösung der KdV-Gleichung, die in eine Familie von Lösungen der KP-Gleichung gehört, die das Profil einer solitären Welle in x haben und in z periodisch sind; diese *periodisch modulierten solitären Wellen* entstehen aus der solitären Welle der KdV-Gleichung (einer homogenen solitären Welle) in einer dimensionsbrechenden Bifurkation. Ich wende mich nun permanenten Wasserwellen zu, nehme $X = z$ in der räumlichen Dynamik und wähle einen Phasenraum \mathcal{X} , um Wellen zu erfassen, die für $\xi \rightarrow \pm\infty$ verschwinden. In diesem mathematischen Rahmen ist also jede homogene solitäre Welle eine Gleichgewichtslösung zu (1). Das Spektrum des linearen Operators um dieses Gleichgewicht besteht aus zwei imaginären Eigenwerten zusammen mit kontinuierlichem Spektrum, das die ganze reelle Achse bedeckt. Ohne das kontinuierliche Spektrum würde der Lyapunovsche Zentrumssatz eine Familie periodischer Lösungen liefern, die periodisch modulierten solitären Wellen entsprechen. M. D. Groves, M. Haragus und S.-M. Sun zeigten, wie sich der Lyapunovsche Zentrumssatz modifizieren lässt, um die durch das kontinuierliche Spektrum verursachte Schwierigkeit zu überwinden und das gleiche Ergebnis zu erhalten (siehe Abbildung 7).

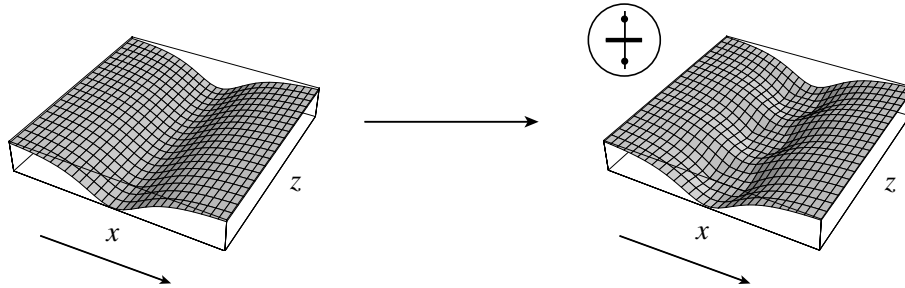


Abbildung 7: Die periodisch modulierte solitäre Welle auf der rechten Seite entsteht aus der homogenen solitären Welle auf der linken Seite in einer dimensionsbrechenden Bifurkation.

Das zweite Beispiel betrifft Wellenbewegungen der Form $\eta(x, z, t) = \eta(x - c_g t, x - c_p t)$, die bezüglich ihres zweiten Argumentes periodisch sind und das Profil einer solitären Welle oder einer verallgemeinerten solitären Welle in ihrem ersten Argument haben (ein hilfreiches Beispiel wäre $\text{sech}(x - c_g t) \sin k(x - c_p t)$). Diese Wellen sind keine permanenten Wellen, sie bestehen vielmehr aus einer umhüllenden Funktion, die sich mit Geschwindigkeit c_g (der 'Gruppengeschwindigkeit') fortbewegt und einen periodischen Wellenzug moduliert, der sich mit Geschwindigkeit c_p (der 'Phasengeschwindigkeit') bewegt. Ein Beispiel für einen solchen *modulierenden Puls* ist in Abbildung 8 skizziert. M. D. Groves & G. Schneider wandten räumliche Dynamik mit $X = x - c_g t$ und $Z = x - c_p t$ an und zeigten, dass ein unendlichdimensionale invariante Mannigfaltigkeit existiert, deren linearisierter Fluss durch zwei reelle und unendlich viele imaginäre Eigenwerte bestimmt wird. In einer approximierenden Birkhoff'schen Normalform entkoppeln sich der reelle Teil, der mit einem Puls verbunden ist, und der imaginäre Teil, der fastperiodische Bewegungen kleiner Amplitude erzeugt. Groves & Schneider zeigten, wie diese Strukturen mit Hilfe von Energieabschätzungen zusammengeleimt werden können, um modulierende Pulse zu ergeben, die gegen kleine, nicht verschwindende Störungen für $X \rightarrow \pm\infty$ konvergieren. Dasselbe Ergebnis gilt für andere Gleichungen mit dieser Eigenwertstruktur, insbesondere für nichtlineare Wellengleichungen wie die Sin-Gordon-Gleichung und das ϕ^4 -Modell.

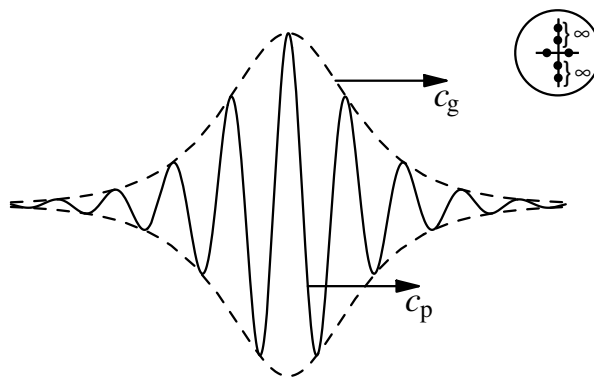


Abbildung 8: Ein modulierender Puls, der gegen eine Störung kleiner Amplitude konvergiert