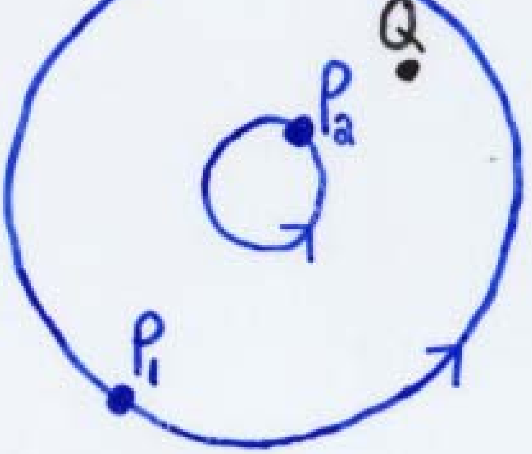
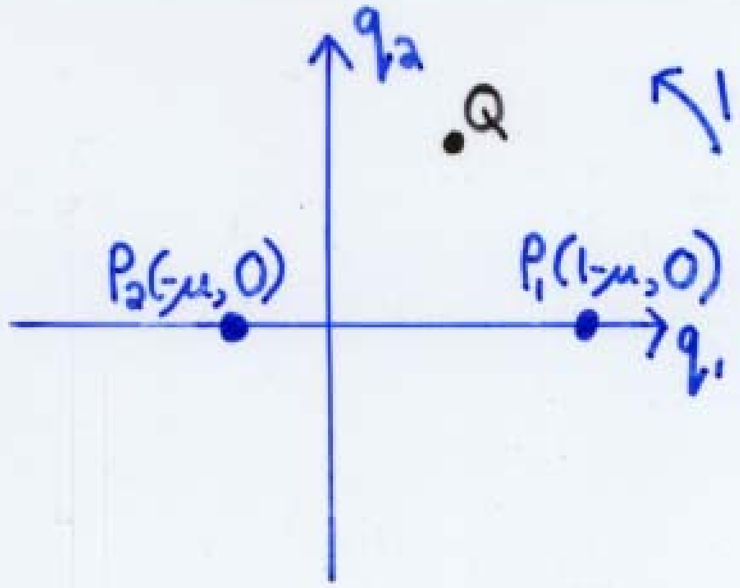
DAS EINGESCHRÄNKTE 3-KÖRPER-PROBLEM





- Die Massen von P_1, P_2, Q sind $\mu, 1-\mu, \varepsilon \ll 1$

Bewegungsgleichungen für $Q(q_1, q_2)$:

$$\ddot{q}_1 - 2\dot{q}_2 - q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \qquad \ddot{q}_2 + 2\dot{q}_1 - q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}$$

$$U = \frac{\mu}{|P_1 - Q|} + \frac{1-\mu}{|P_2 - Q|}$$

Durch die Einführung von

$$p_1 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)/2, \qquad p_2 = (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)/2$$

erhalten wir ein Hamiltonsches System mit zwei Freiheitsgraden:

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \qquad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2}$$

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} - q_1 p_2 + q_2 p_1 - U(q_1, q_2)$$

GLEICHGEWICHTE

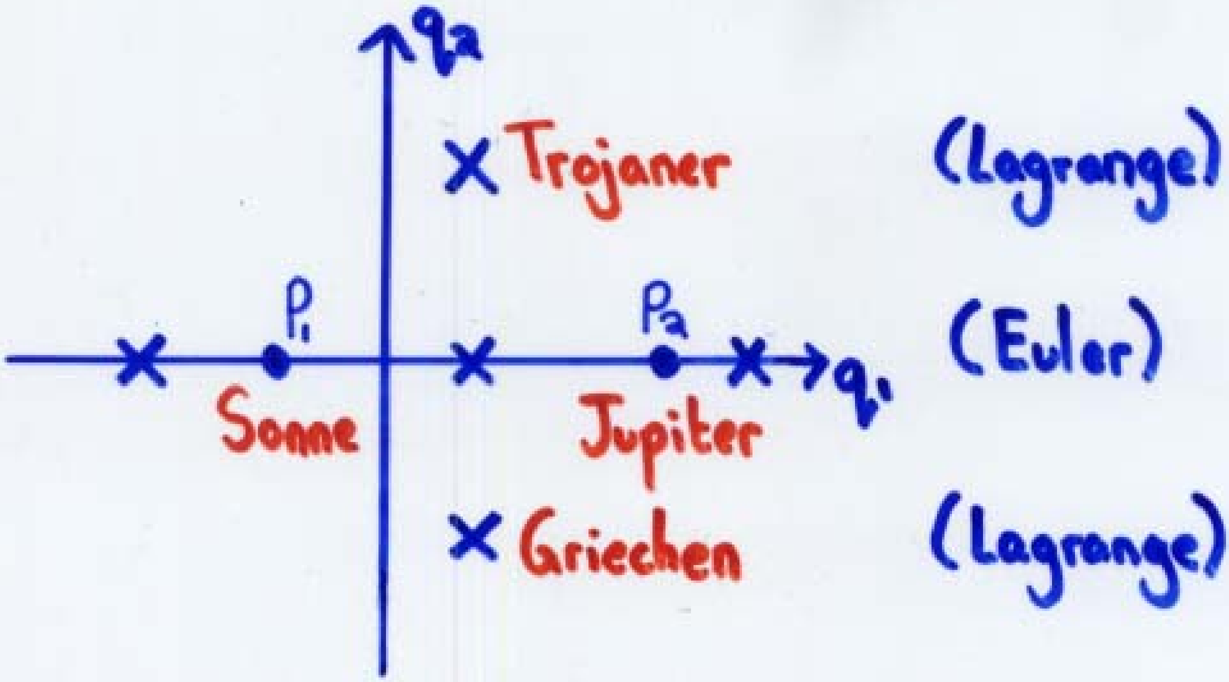
Gleichgewichte eines Hamiltonschen Systems

$$\dot{x} = J\nabla H, \quad x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

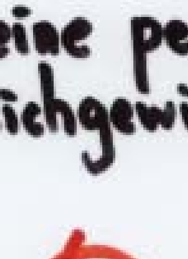
mit n Freiheitsgraden sind Lösungen

$$q = \text{const}, \quad p = 0$$

- Unser 3-Körper-Problem hat 5 Gleichgewichte:



- Existieren kleine periodische Schwingungen um diese Gleichgewichte?



KLEINE SCHWINGUNGEN

Wir betrachten ein Hamiltonsches System mit n Freiheitsgraden und einem 0-Gleichgewicht:

$$\dot{x} = J\nabla H, \quad x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla H(0) = 0$$

- Wann besitzt dieses System Lösungen mit
$$x(t+T) = x(t), \quad |x(t)| \ll 1 \; ?$$
- Hat ein beliebiges dynamisches System
$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \qquad\qquad f(0) = 0 \\ &= Lx + N(x) \end{aligned}$$
solche Lösungen, so muss L zwei imaginäre Eigenwerte $\pm i\omega$ besitzen.
- Diese Bedingung ist jedoch nicht hinreichend:
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x(x^2+y^2) \\ \dot{y} &= x - y(x^2+y^2) \end{aligned} \qquad (*)$$

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat Eigenwerte $\pm i$. Jede Lösung zu $(*)$ erfüllt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right) = x\dot{x} + y\dot{y} = -(x^2+y^2)^2 < 0$$

DER LYAPUNOVSCHE ZENTRUMSSATZ

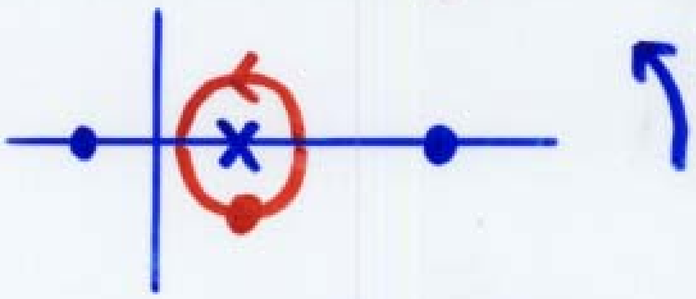
$$\dot{x} = J\nabla H \qquad x \in \mathbb{R}^{2n} \qquad \nabla H(0) = 0$$
$$= Lx + N(x)$$

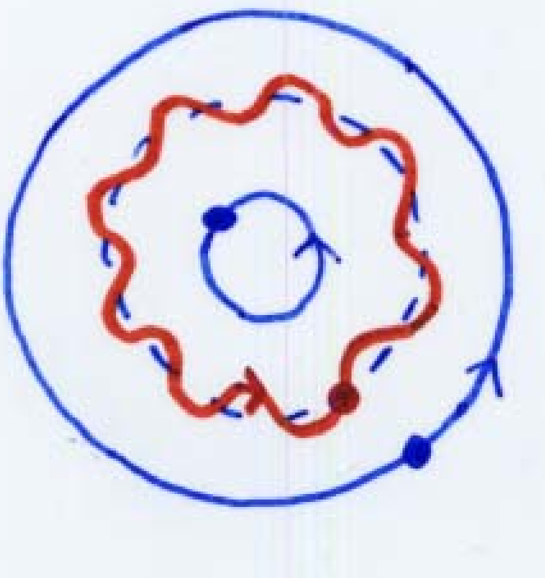
- L hat imaginäre Eigenwerte $\pm i\omega$
- $\pm in\omega$, $n \neq \pm 1$ ist nicht Eigenwert von L (Nichtresonanzbedingung)
- Es existiert eine Familie von Lösungen

$$u_s(t + 2\pi/\omega_s) = u_s(t), \qquad |u_s(t)| \ll 1$$
$$\omega_s \to \omega, \quad u_s \to 0 \quad \text{für } s \to 0$$

Im 3-Körper-Problem:

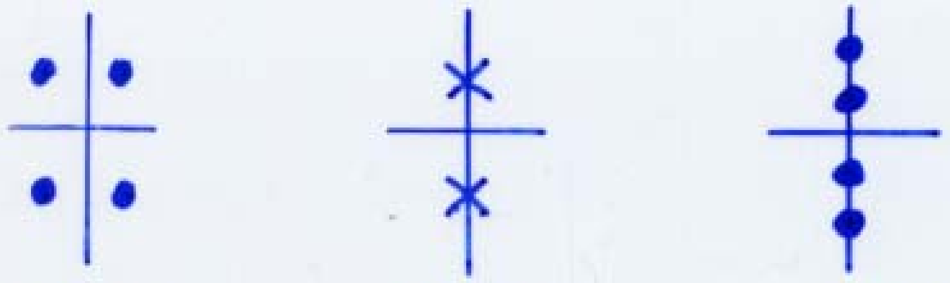
- Für die Eulerschen Gleichgewichte: $\pm i\omega, \pm\lambda$





DIE LAGRANGESCHEN GLEICHGEWICHTE

Eigenwerte:



$\pm i\omega_2$

$\pm i\omega_1$

$\omega_2 > \omega_1$

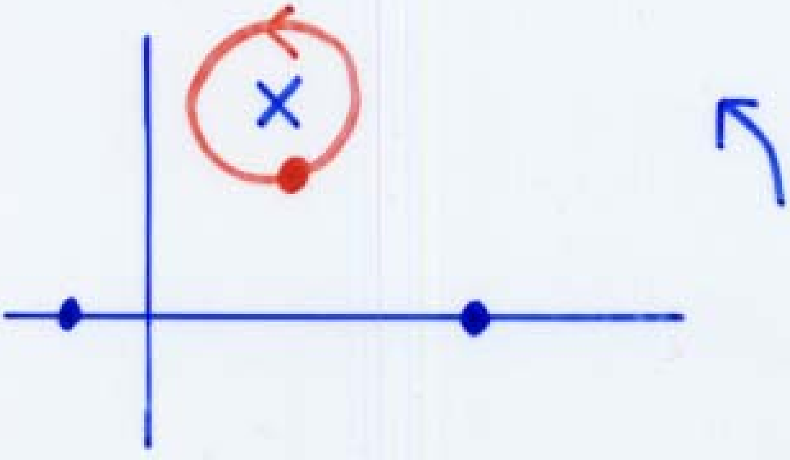
$\mu > \mu_c$ $\qquad$ $\mu = \mu_c$ $\qquad$ $\mu < \mu_c$

$$\mu_c = \tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{69}/9\right) \sim 0{,}0385$$

- Sonne-Jupiter: $\mu \sim 1/1000$, Erde-Mond: $\mu \sim 1/80$
- Die Eigenwerte $\pm i\omega_2$ erzeugen immer eine Lyapunovsche Familie
- Die Eigenwerte $\pm i\omega_1$ erzeugen eine weitere Lyapunovsche Familie falls $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{Z}$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = n \Leftrightarrow \mu = \mu_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{16n^2}{27(n^2+1)^2}\right)^{1/2}$$

$$\mu_c > \mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \ldots > 0$$



DER LYAPUNOVSCHE ZENTRUMSSATZ

$$\dot{x} = J\nabla H$$
$$= Lx + N(x)$$

Wir schreiben

$$H(x) = \tfrac{1}{2} H''(0)(x,x) + O(|x|^3)$$

- $H''(0)(x,x) \geq c|x|^2 \Rightarrow$ Wir können jede Lyapunovsche Familie periodischer Lösungen durch kleine Werte von H parameterisieren

Folgerung:

L hat nichtresonante Eigenwerte $\pm i\omega_1, \dots, \pm i\omega_n$

$\Rightarrow$ Jede 'Energiefläche' $\{H = \varepsilon\}$ enthält n geometrisch verschiedene periodische Lösungen

Weinstein/Moser:

Dieses Ergebnis gilt auch ohne die Nichtresonanzbedingung

d.h. $H''(0)(x,x) \geq c|x|^2 \Rightarrow$ Es existieren n geometrisch verschiedene periodische Lösungen auf $\{H = \varepsilon\}$

DER LYAPUNOVSCHE ZENTRUMSSATZ

$$\dot{x} = J\nabla H \qquad x \in \mathbb{R}^{2n}$$
$$= Lx + N(x)$$

- L hat Eigenwerte $\pm i\omega_j$ ($Le_j = i\omega_j e_j$, $L\bar{e}_j = -i\omega_j \bar{e}_j$)

$$\underbrace{\pm i\omega_1, \ldots, \pm i\omega_\ell}_{\text{resonant}} \qquad \underbrace{\pm i\omega_{\ell+1}, \ldots, \pm i\omega_n}_{\text{nichtresonant}}$$

resonant: $\omega_j \geq \omega_1$, $\frac{\omega_j}{\omega_1} \in \mathbb{Z}$

nichtresonant: $\frac{\omega_j}{\omega_1} \notin \mathbb{Z}$

$\{e_1, \ldots, e_n, \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ ist Basis für $\mathbb{C}^{2n}$

$\{e_1, \ldots, e_\ell, \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_\ell\}$ ist Basis für E^R

- $H''(0)(v,v) \geq c|v|^2$ für alle $v \in E^R$

- Es liegen ℓ geometrisch verschiedene periodische Lösungen auf $\{H = \varepsilon\}$. Die Perioden sind nah $2\pi/\omega_1$.

Methode:

- Variationsrechnung
- Lyapunov-Schmidt-Reduktion

EIN VARIATIONSPRINZIP

$$\dot{x} = J\nabla H$$
$$= Lx + N(x)$$

Wir skalieren die Zeit:

$$s = \omega t$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{ds} = \lambda L x + \lambda N(x), \qquad \lambda = 1/\omega$$

und suchen 2π-periodische Lösungen mit

$$|x(t)| \ll 1, \quad |\lambda - \lambda_0| \ll 1, \qquad \lambda_0 = 1/\omega_1$$

- 2π-periodische Lösungen auf der Energiefläche $\{H = \varepsilon\}$ sind kritische Punkte des Wirkungsfunktionals
- $$S_\lambda(x) = \int_0^{2\pi} \left\{ p_1 \frac{dq_1}{ds} + \dots + p_n \frac{dq_n}{ds} - \lambda (H(x) - \varepsilon) \right\} ds$$
- $$S'_\lambda(x)\delta x = \int_0^{2\pi} K\left(\frac{dx}{ds} - \lambda L x - \lambda N(x)\right) \delta x \, ds, \quad K = J^{-1}$$
- Die direkte Methode ist technisch schwierig
- H und S sind invariant bezüglich
  $$(T_\alpha x)(s) = x(s+\alpha)$$

LYAPUNOV-SCHMIDT-REDUKTION

$$\underbrace{\frac{dx}{ds} - \lambda L x}_{:=L_\lambda x} = \lambda N(x) \qquad \mathcal{X} = H^1_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2n})$$

Wir schreiben

$$x(s) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_m e^{ims}, \qquad x_{-m} = \bar{x}_m$$

$$= \sum_{m,j} (a_{mj} e_j + b_{mj} \bar{e}_j) e^{ims} \qquad (Le_j = i\omega_j e_j,\ L\bar{e}_j = -i\omega_j \bar{e}_j)$$

Es folgt

$$L_\lambda x = \sum_{m,j} [i(m - \lambda\omega_j) a_{mj} e_j + i(m + \lambda\omega_j) b_{mj} \bar{e}_j] e^{ims}$$

- $\dim \ker L_{\lambda_0} = 2\ell$: $\lambda_0 = 1/\omega_1$, $\omega_j/\omega_1 \in \mathbb{Z}$ für $j \leq \ell$
- $\mathcal{X} = \ker L_{\lambda_0} \oplus \operatorname{Im} L_{\lambda_0}$, $\quad x = v + w$

$$L_\lambda v = P\lambda N(v + w)$$

$$L_\lambda w = (I - P)\lambda N(v + w)$$

- $$L_\lambda^{-1} w = \sum_{m,j} \left\{ \frac{a_{mj}}{i(m - \lambda\omega_j)} e_j + \frac{b_{mj}}{i(m + \lambda\omega_j)} \bar{e}_j \right\} e^{ims}$$

$\hookrightarrow \omega_j \to \infty \Rightarrow \{m - \lambda\omega_j\}$ häuft sich im Nullpunkt (kleine Nenner)

- $w = w(v, \lambda)$, $\quad w = O(|v|^2)$

DAS REDUZIERTE VARIATIONSPRINZIP

Kritische Punkte von S_λ auf $\{H=\varepsilon\}$ sind Lösungen von

$$L_\lambda x = \lambda N(x)$$

Wir definieren reduzierte Funktionale

$$\tilde{S}_\lambda(v) = S_\lambda(v+w(v,\lambda)), \quad \tilde{H}_\lambda(v) = H(v+w(v,\lambda))$$

Kritische Punkte von $\tilde{S}_\lambda$ auf

$$S_\varepsilon = \{\tilde{H}_\lambda = \varepsilon\}$$

sind Lösungen der Gleichung

$$L_\lambda v = P\lambda N(v+w(v,\lambda))$$

- Für $\delta v \in TS_\varepsilon|_v$:

$$\tilde{S}'(v)\delta v = \int_0^{2\pi} \left\langle KP(L_\lambda - \lambda N(v+w(v,\lambda))), \delta v \right\rangle ds$$

- Für $\delta v \perp TS_\varepsilon|_v$, d.h. $\delta v = c\tilde{H}_\lambda'(v)$:

$$\tilde{S}'(v)\tilde{H}'(v) = \int_0^{2\pi} \left\langle KP(L_\lambda v - \lambda N(v+w(v,\lambda))), \tilde{H}_\lambda'(v) \right\rangle ds$$

$$\tilde{S}'(v)\tilde{H}'(v) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda(v),\ \lambda(0) = \lambda_0,\ \lambda = O(|v|^2)$$

VARIATIONSRECHNUNG

Wir suchen kritische Punkte von $\tilde{S}$ auf $S_\varepsilon = \{\tilde{H} = \varepsilon\}$.

- $$\tilde{H}(v) = \frac{1}{2}\underbrace{H''(0)(v,v)}_{\geq c|v|^2} + O(|v|^3)$$

$$\Rightarrow \quad S_\varepsilon \cong S^{2\ell-1}$$

Die ursprünglichen Funktionale S, H sind invariant bezüglich

$$(T_\alpha x)(s) = x(s+\alpha)$$

$\Rightarrow$ $\tilde{H}$ und $\tilde{S}$ sind invariant bezüglich

$$\begin{array}{l} v = v_1 e_1 + \ldots + v_\ell e_\ell + \bar{v}_1 \bar{e}_1 + \ldots + \bar{v}_\ell \bar{e}_\ell \\ \downarrow \\ T_\alpha v = v_1 e^{i\frac{\omega_1}{\omega_1}\alpha} e_1 + \ldots + v_\ell e^{i\frac{\omega_\ell}{\omega_1}\alpha} e_\ell + \text{c.c.} \end{array}$$

Wir müssen $\tilde{S}$ betrachten auf

$$\begin{aligned} S_\varepsilon / T_\alpha &\cong S^{2\ell-1}/T_\alpha \\ &\cong \mathbb{C}P^{\ell-1} \quad \text{(Hopfsche Faserung)} \end{aligned}$$

- $\tilde{S}$ hat ℓ kritische Punkte auf S_ε / T_α weil $\mathrm{cat}(\mathbb{C}P^{\ell-1}) = \ell$ (Lusternik-Schnirelman)

KATEGORIE-THEORIE

Die Kategorie einer Mannigfaltigkeit M ist die kleinste Anzahl abgeschlossener, zusammenziehbarer Untermengen von L, die M bedecken.

- $\mathrm{cat}\, S^2 = 2$
- $\mathrm{cat}\, S^n = 2$

- $\mathrm{cat}\, T^2 = 3$
- $\mathrm{cat}\, T^n = n+1$

- $\mathrm{cat}\, \mathbb{C}P^{n-1} = n$

$$\left.\begin{array}{l} \text{(i) } M \text{ ist kompakt} \\ \text{(ii) } \mathrm{cat}\, M = n \\ \text{(iii) } F \in C^1(M, \mathbb{R}) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} F \text{ hat } n \text{ kritische Punkte} \\ c_k = \inf\limits_{A \in \mathcal{A}_k} \sup\limits_{u \in A} F(u) \\ \mathcal{A}_k = \{A \subset M, \bar{A} = A, \mathrm{cat}_M A \geq k\} \end{array}$$

(i) kann durch eine 'Kompaktheitsbedingung' an F ersetzt werden, z.B. die Palais-Smale-Bedingung

$$\left.\begin{array}{l} \{x_n\} \text{ beschränkt} \\ F'(x_n) \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \{x_n\} \text{ konvergent}$$

WELLENGLEICHUNGEN

Wir suchen zeitperiodische Lösungen von

$$v_{tt} = v_{xx} - mv + v^3, \qquad x \in (0,\pi)$$
$$v(t,0) = v(t,\pi) = 0$$

- Formulierung als Evolutionsgleichung:

$$v_t = w \qquad \qquad \mathcal{X} = H_0^{s+1}(0,\pi) \times H_0^s(0,\pi)$$
$$w_t = v_{xx} - mv + v^3$$

- Ein Hamiltonsches System:

$$v = \frac{\delta H}{\delta w}, \qquad w = -\frac{\delta H}{\delta v}$$

$$H = \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{2}(v_x^2 + w^2) + \frac{m v^2}{2} - \frac{v^4}{4} \right\} dx$$

- Wir führen Sinus-Reihen ein:

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi (j^2+m)^{1/2}} \right)^{1/2} q_j \sin jx, \quad w = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2(j^2+m)^{1/2}}{\pi} \right)^{1/2} p_j \sin jx$$

- Ein Hamiltonsches System mit unendlich vielen Freiheitsgraden:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \ldots \qquad \mathcal{X} = (\ell^{s+1/2})^2$$

$$H = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} (j^2+m)^{1/2} (q_j^2 + p_j^2) + \sum_{i,j,k,l} c_{ijkl}\, q_i q_j q_k q_l$$

- Die Frequenzen sind $\omega_j = (j^2+m)^{1/2} \to \infty$ für $j \to \infty$
- Kleine Nenner $\longrightarrow$ Nash-Moser? KAM?

DER LYAPUNOVSCHE ZENTRUMSSATZ

Das Problem ist

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_j &= \omega_j p_j \\ \dot{p}_j &= -\omega_j q_j + N_j(q) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = N(q)$$

Wir skalieren die Zeit $s = t\omega$:

$$\underbrace{\omega^2 \ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j}_{:= L_\omega q} = N(q), \qquad X = H^1_{per}(\mathbb{R}, \ell^{s+1/2})$$

und suchen 2π-periodische Lösungen mit $|q|, |\omega - \omega_1| \ll 1$.

Wir schreiben

$$q(s) = \sum_{j,\ell=0}^{\infty} q_{j\ell} e_\ell \cos js, \qquad e_\ell = (0, \ldots, 1, \ldots)$$

Es folgt

- $$L_\omega q = \sum_{j,\ell=0}^{\infty} (-j^2\omega^2 + \omega_\ell^2) q_{j\ell} e_\ell \cos js$$
- $\dim \ker L_{\omega_1} = 1, \quad X = \ker L_{\omega_1} \oplus \operatorname{Im} L_{\omega_1}$
- $q = v + w, \quad L_\omega v = PN(v+w), \quad L_\omega v = (I-P)N(v+w)$
- $$L_\omega^{-1} q = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_{j\ell}}{-j^2\omega^2 + \omega_\ell^2} e_\ell \cos js$$

Bambusi $\rightarrow$ $|\omega_\ell^2 - j^2\omega^2| = \underbrace{|\omega_\ell - j\omega|}_{\geq \frac{\gamma}{j}} \underbrace{|\omega_\ell + j\omega|}_{\geq cj} \geq c$

DER LYAPUNOVSCHE ZENTRUMSSATZ

Zahlentheoretisches Ergebnis für $\omega_j = (j^2+m)^{1/2}$:

Für alle m aus einer nicht abzählbaren Menge $M \subset [0,\infty)$ existieren eine Konstante γ und eine Menge Ω mit

- ω_1 ist Häufungspunkt von Ω
- Es gilt die diophantinischen Bedingung

$$|\omega_\ell - j\omega| \geq \frac{\gamma}{j} \quad \text{für } \omega \in \Omega,\ j \geq 1,\ \ell \geq 2$$

Mit diesem Ergebnis geht man wie im endlich-dimensionalen Fall vor.

- Die Frequenzen müssen aus Ω genommen werden.
- Die Lösungen sind milde Lösungen der Wellengleichung.
- Der resonante Fall kann behandelt werden
- Falls unendlich viele Frequenzen in Resonanz sind:
  - Das reduzierte Variationsprinzip ist unendlichdimensional
  - Verlust von Kompaktheit